Informática II

Clase 5: Continuación de funciones implícitas

Mario Merino Martínez
mario.merino@upm.es

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

16 de abril de 2013

Definición implícita de funciones

Frecuentemente, sabemos que una variable y depende de otra variable x, pero no poseemos una función $y = f(x)$, **"explícita en** y". En lugar de ello, tenemos

$$G(x, y) = 0,$$

que define ***implícitamente***:

- la y en función de la x, o bien
- la x en función de la y.

$$\textit{Ejemplo:} \quad x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Para que exista $y = f(x)$ se han de cumplir ciertas condiciones. En el ejemplo, no existe $y = f(x)$ en torno a $x = 2$ (la circunferencia es vertical) *[pero sí existe $x = h(y)$]*

Teorema de la función implícita en dos variables

Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$. Sea (x_0, y_0) un punto solución de $G(x, y) = 0$. Si $\partial G / \partial y \neq 0$ en (x_0, y_0), entonces existe algún **conjunto abierto** $U \subset \mathbb{R} / x_0 \in U$ tal que

$$\exists! f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) \, / \, G(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Diferenciando $G(x, y) = 0$, calculamos fácilmente la derivada de la función:

$$G_x dx + G_y dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{G_x}{G_y}$$

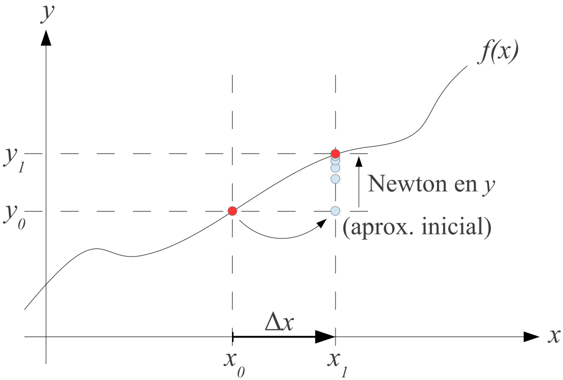
Básicamente, el **teorema de la función implícita** pide que $G_y\big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, es decir, que $y = f(x)$ no se haga vertical en (x_0, y_0), y que (x_0, y_0) no sea un punto singular $(G_x = G_y = 0)$.

Cálculo de $y = f(x)$. Continuación de la solución I

No siempre es posible "despejar" analíticamente (o hacer "explícita") la dependencia funcional $y = f(x)$, pero podemos **obtenerla numéricamente**. A este proceso se le conoce como **continuación de la solución** a partir de (x_0, y_0).

1. Comenzamos en un punto solución conocido, (x_0, y_0).
2. Nos **movemos en** x: $x_1 = x_0 + \Delta x$, con Δx dado. Queda fijado x_1.
3. Puesto que $y_0 = f(x_0)$, es de esperar que $f(x_1) \simeq y_0$. Utilizamos y_0 como **aproximación inicial para calcular** y_1 **con el método de Newton** (o similar), a partir de la ecuación $G(x_1, y) = 0$.
4. Ya tenemos un **nuevo punto de la curva** de f, i.e., (x_1, y_1).
5. **Repetimos** el proceso para calcular (x_2, y_2)

Cálculo de $y = f(x)$. Continuación de la solución II

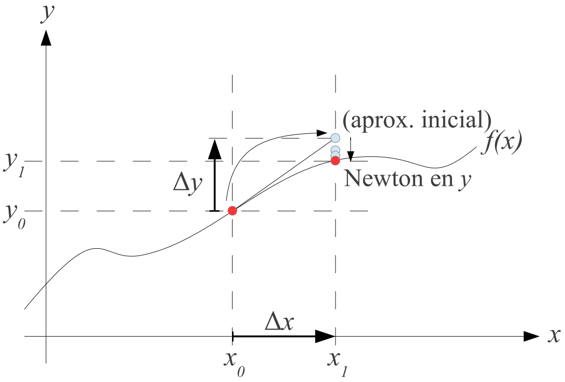


Continuación mejorada I

A veces, utilizar y_0 de la solución anterior como aproximación inicial para el Newton actual no es suficientemente bueno.

- Al movernos Δx en x, es de "esperar" que y cambie en una cantidad:
$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$$
- Entonces, **una aproximación inicial mucho mejor** para el nuevo punto es $y_0 + (dy/dx)\,\Delta x$
- La derivada dy/dx la calculamos sencillamente de $dG\,(x, y) = G_x dx + G_y dy = 0 \Rightarrow dy/dx = -G_x/G_y$

Continuación mejorada II



Implementación

1. **Declarar** `x(0:n), y(0,n)`. **Dar valores** al vector `x` (e.g., puntos equiespaciados)

1. **Dar valor** a `y(0)` (la solución conocida)

1. En un bucle en `i`, desde 1 hasta n:

   1. **Tomar** `z = y(i-1)+`Δ`y` (opcionalmente) como condición inicial para hallar `y(i)`

   1. Lanzar un **Newton** para resolver `G(x(i), z) = 0` (con subrutina — mejor, — o con un bucle ahí mismo)

   1. **Guardar** la solución obtenida en `y(i)`

2. **Escribir** los vectores `x, y` en un archivo para **dibujar** $y = f\left(x\right)$ (con Excel)

Teorema de la función implícita general

Ahora tenemos m ecuaciones, así que — en principio — **podemos despejar las m incógnitas y_i que elijamos** en función de las x_j restantes:

$$\begin{cases} G_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n; y_1, y_2 \ldots y_m\right) = 0 \\ G_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n; y_1, y_2 \ldots y_m\right) = 0 \\ \ldots \\ G_m\left(x_1, x_2, \ldots x_n; y_1, y_2 \ldots y_m\right) = 0 \end{cases}$$

Sea $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right)$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, una **función vectorial** $\mathcal{C}^1$. Sea $\left(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0\right)$ un punto solución de $\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = \boldsymbol{0}$. Si la **matriz Jacobiana respecto a $\boldsymbol{y}$** cumple $\left|\partial \boldsymbol{G} / \partial \boldsymbol{y}\right| \neq 0$ en $\left(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0\right)$, entonces existe algún **conjunto abierto** $U \subset \mathbb{R}^n / \boldsymbol{x}_0 \in U$ tal que

$$\exists! \boldsymbol{f} : U \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) / \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)\right) = \boldsymbol{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in U.$$

Derivadas en el caso general

Diferenciando todas las ecuaciones $G_i\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0$, podemos **despejar** todas las derivadas parciales $\partial y_i/\partial x_j$ a partir del sistema lineal

$$\begin{cases} G_{1x_1}\,dx_1+\ldots+G_{1x_n}\,dx_n+G_{1y_1}\,dy_1+\ldots+G_{1y_m}\,dy_m=0\\ G_{2x_1}\,dx_1+\ldots+G_{2x_n}\,dx_n+G_{2y_1}\,dy_1+\ldots+G_{2y_m}\,dy_m=0\\ \ldots\\ G_{mx_1}\,dx_1+\ldots+G_{mx_n}\,dx_n+G_{my_1}\,dy_1+\ldots+G_{my_m}\,dy_m=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}=-\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{y}}d\boldsymbol{y}\quad\Rightarrow\quad-\left(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{y}}\right)^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}=d\boldsymbol{y},$$

de donde podemos **identificar**:

$$dy_1=\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)dx_2+\ldots+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right)dx_n;\quad \text{etcétera.}$$