Informática II

Clase 6: Integración numérica

Mario Merino Martínez
mario.merino@upm.es

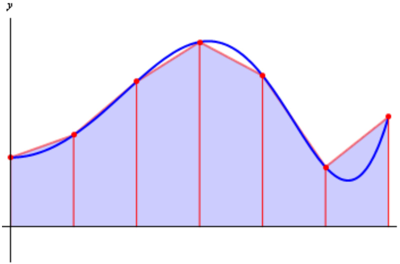
Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

7 de mayo de 2013

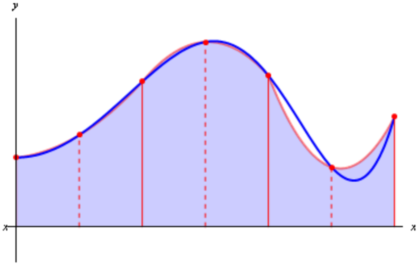
Es posible estimar numéricamente **integrales definidas**,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Para ello, aproximamos el área de la integral (continua) por una **suma** (discreta) de áreas de **polígonos simples**:



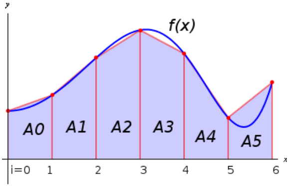
(a) Regla del Trapecio



(b) Regla de Simpson

Regla del Trapecio I

Una de las formas más simples de evaluar numéricamente una integral es mediante la **regla del trapecio**, que *interpola* la función con segmentos rectos



$$I \simeq T_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

1. Descomponemos el intervalo de integración en n subintervalos con $n+1$ nodos (típicamente, los elegimos **equiespaciados**).
2. **Calculamos** cuánto vale la **función** en cada nodo $(i = 0, 1, \ldots, n)$.
3. Calculamos el área de los trapecios $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ que se forman con los puntos calculados, tomando los **nodos dos a dos**.
4. Sumamos todas las áreas.

Regla del Trapecio II

Área de un trapecio (fórmula del trapecio simple):

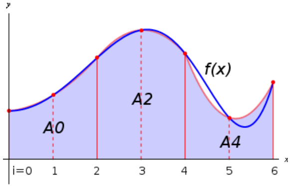
$$T_1 = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Suma de n trapecios, con base $h = (b-a)/n$ (fórmula del trapecio compuesta):

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(i)+f(i+1)}{2} =$$
$$= h\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + \frac{f(n)}{2}\right)$$

Regla de Simpson I

En lugar de aproximar la función con segmentos rectos, la aproximamos por **trozos de parábola**.



$$I \simeq S_n = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} A_{2i}$$

1. Descomponemos el intervalo de integración en n subintervalos con $n+1$ nodos (típicamente, los elegimos equiespaciados). n **ha de ser par**.
2. Calculamos cuánto vale la **función** en cada nodo ($i = 0, 1, \ldots, n$).
3. Calculamos el área de los prismas ($A_0, A_2, \ldots, A_{(n-2)/2}$) que se forman con los puntos calculados, tomando los nodos de **tres en tres**.
4. Sumamos todas las áreas.

Regla de Simpson II

Ahora, estamos interpolando la función con parábolas. Una **parábola queda definida perféctamente por tres puntos**. En el caso de tres nodos $x = x_1, x_2, x_3$, la parábola que pasa por ellos es:

$$p_2(x) = f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$+ f(x_3) \frac{(x - x_2)(x - x_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)}$$

Si $x_1 = a$, $x_2 = (a + b)/2$, y $x_3 = b$, la integral vale

$$\int_a^b p_2(x)\, dx = \frac{b - a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Regla de Simpson III

Área de un prisma, descomponiendo $[a, b]$ en dos subintervalos de tamaño $h = (b - a)/2$ (fórmula de **Simpson simple**):

$$S_2 = A_0 = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Suma de n prismas (fórmula de **Simpson compuesta**):

$$S_n = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} A_{2i} =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(0) + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f(i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(i) + f(n)\right)$$

Observaciones

- Ojo con la nomenclatura: **tomamos** $n+1$ **nodos (contamos desde** $i=0$**),** n **intervalos.**
- ¿**Cómo dividir** un intervalo en n subintervalos iguales (con $n+1$ nodos)? Primero encontrar $h=(b-a)/n$. Los nodos son $x_i = a + hi$.
- En Trapecio, hay n prismas. En Simpson, hay $n/2$ (por eso n necesita ser múltiplo de 2 en Simpson)

Estudio del Error

- Trapecio se basa en **interpolar la función con rectas**, Simpson **con parábolas**. Por tanto:
- Trapecio integra sin error de truncación **polinomios de hasta grado 1** (i.e., rectas). El error de integración es $\propto h^2$
- Simpson integra sin error de truncación **polinomios de hasta grado 3** (la parte antisimétrica de tercer grado se autocancela en cada trozo de parábola). El error de integración es $\propto h^4$

Implementación en Subrutina

Lo más conveniente es crear dos subrutinas, trapecio y simpson, que tomen la función a integrar, los extremos de integración, y el número de subintervalos a utilizar, y devuelvan el resultado. E.g.:

```
subroutine trapecio(fun,a,b,n,integral)
```

Consejos de implementación:

- Calcular el tamaño de subintervalo primero, h
- Sumar (utilizando las fórmulas compuestas) en un bucle. En el caso de Simpson, puede ser más cómodo utilizar dos bucles independientes (uno para los nodos pares, otro para los impares)
- Fuera del bucle hay que tratar de forma independiente a los extremos de intervalo ($f(a)$, $f(b)$).
- Operar siempre en doble precisión (todo). (nota: también sería posible usar function en vez de subroutine)

Integrales dobles I

Estas fórmulas pueden emplearse recursivamente para calcular integrales múltiples con la regla de Fubini:

$$\iint f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right)$$

1. Calculamos h_x que divide el intervalo de x en n subintervalos: $h_x = (b-a)/n$.
2. En un bucle interno, para cada nodo x_i, calculamos $g(x_i) = \int_c^d f(x_i,y)\, dy$ haciendo uso de la función $f(x,y)$. Dividimos el intervalo de y en m subintervalos, $h_y = (d-c)/m$. Intentamos que $h_x \simeq h_y$, normalmente. Utilizamos la fórmula de integración correspondiente para integrar en y (para un x_i congelado)
3. En el bucle externo, vamos integrando $\int_a^b g(x)\, dx$ usando la fórmula correspondiente.

Integrales dobles II

- Si el dominio de integración no es rectangular, sino que c y d son funciones de x:

$$\iint f\left(x,y\right)\,dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f\left(x,y\right)\,dy\right)$$

tan solo hay que tener en cuenta que c y d varían dentro del bucle de integración de $g\left(x\right)$. Si queremos un tamaño de subintervalo h_y más o menos constante, habrá que variar m acordemente.